Nicolae Grigore

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele V-VIII

Editura NOMINA

Editor: Alexandru Creangă
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pentru comenzi prin poștă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	Zona
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj și Mehedinți), Banat și Transilvania (Alba și Hunedoara);
0748.111.247	Crișana și Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureș, Harghita și Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea și Olt), Transilvania (Brașov și Sibiu) și Muntenia (Argeș, Teleorman și Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistrița-Năsăud) și zona Maramureș;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamț, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iași, Botoșani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmbovița, Prahova, Brăila, Ialomița și Călărași), Dobrogea și jud. Galați;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	București

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeș
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
GRIGORE, NICOLAE
Memorator de matematică pentru clasele V-VIII / Nicolae Grigore. - Pitești : Nomina, 2024
ISBN 978-606-535-963-5
51

Cuprins

ARITMETICĂ, ALGEBRĂ

GEOMETRIE

ARITMETICĂ, ALGEBRĂ

1. Mulțimi de numere. Notații

Mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.
Mulțimea numerelor naturale nenule: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.
Mulțimea numerelor naturale pare:
$\mathbb{N}_{2k} = \{2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots\}, k \in \mathbb{N}$.
Mulțimea numerelor naturale impare:
$\mathbb{N}_{2k+1} = \{1, 5, 7, \ldots, 2k + 1, \ldots\}, k \in \mathbb{N}$.
Mulțimea numerelor întregi pozitive:
$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = \mathbb{N}$.
Mulțimea numerelor întregi negative:
$\mathbb{Z}_- = \{-n, \ldots, -3, -2, -1\}, n \in \mathbb{N}$.
Mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Mulțimea numerelor raționale: $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \dfrac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$.

Mulțimea numerelor raționale pozitive:

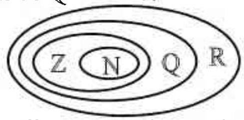
$$\mathbb{Q}_+ = \left\{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{N},\ b \neq 0\right\}.$$

Mulțimea numerelor raționale negative: $\mathbb{Q}_- = \{-x \mid x \in \mathbb{Q}_+\}$.

Mulțimea numerelor iraționale, notată cu $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este formată dintr-o fracție ordinară $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$, cu $(a, b) = 1$, care este o fracție zecimală cu un infinit de zecimale (fracții zecimale neperiodice).

Mulțimea numerelor reale: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, unde $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = 0$.

Între mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ există relațiile de incluziune: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Oricărui număr real m pe axa numerelor îi corespunde un singur punct M și invers, oricărui punct pe axa numerelor îi corespunde un singur număr real m (unic).

Opusul numărului real m, notat $-m$ este numărul care are ca reprezentare pe axa numerelor un punct care este simetricul față de originea axei a punctului care reprezintă numărul real m.

Observație: Numărul natural nu are opus.

Inversul numărului real nenul m este numărul notat $\frac{1}{m} = m^{-1}$.

2. Operații cu numere reale. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Operații de ordinul întâi

Adunarea: Oricare ar fi a și b numere reale, există un număr real s, astfel încât $\boldsymbol{a + b = s}$, unde s = suma, a și b = termenii sumei.

Scăderea: Oricare ar fi a și b numere reale, există un număr real d, astfel încât $\boldsymbol{a - b = d}$, unde d = diferența, a = descăzut, b = scăzător.

Operații de ordinul al doilea

Înmulțirea: Oricare ar fi a și b numere reale, există un număr real p, astfel încât $\boldsymbol{a \cdot b = p}$, unde p = produsul numerelor, a și b sunt factorii produsului.

Împărțirea: Fiind date numerele naturale a și b, $b \neq 0$, există două numere naturale unice c și r, astfel încât $\boldsymbol{a = b \cdot c + r}$, $0 < r < b$, unde c = câtul, r = restul, a = deîmpărțitul, b = împărțitorul.

Dacă $r = 0$, avem împărțire exactă.

Dacă $r \neq 0$, $r < b$, avem împărțire cu rest.

Exemple:

1. Aflați cel mai mic și cel mai mare număr natural care împărțit la 6 se obține câtul egal cu restul.

Rezolvare: $a = b \cdot c + r < b, r < 6 \Rightarrow a = 7r, r = 1 \Rightarrow a = 7$ cel mai mic număr; $a = 5 \Rightarrow$ a = 35 este cel mai mare număr. Numerele sunt: 7 și 35.

2. Aflați numerele naturale n care împărțite la numărul natural m de două cifre se obține câtul 2 și restul cel mai mare număr prim de două cifre.

Rezolvare: $n = m \cdot 2 + 97$, $m > 97 \Rightarrow m \in \{98, 99\}$. Numerele sunt 293 și 295.

Operații de ordinul al treilea

Puterea naturală a unui număr real

Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, puterea naturală $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a numărului a se notează a^n și este $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$ unde, a = baza puterii, n = exponentul puterii care ne arată de câte ori n ori se înmulțește baza prin ea însăși.

Un număr natural a se numește **pătrat perfect** dacă există un număr natural b, astfel încât $a = b^2$.

Citim: a este egal cu b la puterea a doua sau a este egal cu b la pătrat sau a este pătratul lui b.

Ultima cifră a unui număr pătrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Orice număr natural a care are $U(a) = \{2, 3, 7, 8\}$ sigur nu este pătrat perfect.

Exemplu:

Aflați ultima cifră a numărului a, unde:

$a = 2016^{2018} + 2017^{2018} + 2018^{2018} + 2015^{2019}$.

Rezolvare. Orice putere naturală a cifrei 6 are ultima cifră 6. Orice putere naturală a cifrei 5 are ultima cifră 5. Puterile naturale ale cifrelor 2, 3, 7 și 8 pot fi de forma $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ și $4k + 3$; $2018 = 4 \cdot 504 + 2$ este de forma $4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$; $U(2017^{2018}) = U(7^{4k+2}) = U(7^2) = 9$; $U(a) = U(6 + 9 + 4 + 5) = U(24) = 4$.

Un număr natural a se numește **cub perfect**, dacă există un număr natural b astfel încât $a = b^3$.

Citim: a este egal cu b la puterea a treia sau a este egal cu cubul lui b.

Exemplu:

Aflați cel mai mic număr natural $a > 1$, care este atât pătrat perfect, cât și cub perfect.

Rezolvare: Un număr natural a este atât pătrat perfect, cât și cub perfect, dacă există un număr natural $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, astfel încât $a = b^6 = (b^3)^2 = (b^2)^3$. Pentru $b = 2$, obținem cel mai mic număr: $64 = 2^6 = (2^3)^2 = (2^2)^3$.

Rădăcina pătrată

Numărul nenegativ x este rădăcina pătrată a numărului rațional pozitiv $a \geq 0$, dacă $x^2 = a$. Rădăcina pătrată a numărului a se notează cu $\sqrt{a}$. Scriem $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, x \geq 0$.

3. Ordinea efectuării operațiilor cu și fără paranteze

Dacă nu sunt paranteze, operațiile se efectuează în următoarea ordine:

– operațiile de ordinul al III-lea (ridicarea la putere și rădăcina pătrată);

– operațiile de ordinul al II-lea (înmulțirea și împărțirea);

– operațiile de ordinul întâi (adunarea și scăderea).

Operațiile de același ordin se efectuează în ordinea scrierii expresiei date.

Dacă sunt paranteze se efectuează calculele:

– din paranteze mici (rotunde), apoi

– din paranteze mari (drepte), și apoi

– din paranteze acolade.

Exemple:

Calculați: a) $(432 : 24 - 25^2 : 5^3) \cdot 7 - 27^2 : 9^3$;

b) $\{[(412 : 4 - 714 : 7) \cdot 24 + 144 : 3^2] : 2^3 + 15\} \cdot 4$.

Rezolvare: a) $(18 - 5) \cdot 7 - 3^6 : 3^6 = 91 - 1 = 90$;

b) $\{[(103 - 102) \cdot 24 + 16] : 8 + 15\} \cdot 4 = (40 : 8 + 15) \cdot 4 = 80$.

Proprietăți ale operațiilor aritmetice

Adunarea

În mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, adunarea are următoarele proprietăți:

1. **Comutativitatea**: $a + b = b + a, (\forall)\, a, b \in \mathbb{N}$;
2. **Asociativitatea**: $(a + b) + c = a + (b + c), (\forall)\, a, b, c \in \mathbb{N}$;
3. Numărul zero „0" este **element neutru** față de adunare:

   $a + 0 = 0 + a, (\forall)\, a \in \mathbb{N}$.

Suma numerelor naturale consecutive: $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ se află repede folosind formula lui Gauss: $S_n = n \cdot (n + 1) : 2$.

Înmulțirea

Înmulțirea numerelor naturale $\mathbb{N}$ are următoarele proprietăți:

1. **Comutativitatea**: $a \cdot b = b \cdot a, (\forall)\, a, b \in \mathbb{N}$;
2. **Asociativitatea**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), (\forall)\, a, b, c \in \mathbb{N}$;
3. **Distributivitatea**: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c, (\forall)\, a, b, c \in \mathbb{N}^*$.
4. Numărul 1 este **element neutru** față de înmulțire:

   $a \cdot 1 = 1 \cdot a, (\forall)\, a \in \mathbb{N}$.

În mulțimea numerelor întregi

Cum $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, adunarea numerelor întregi are în plus proprietatea:

Orice număr întreg nenul n are un opus, notat cu $-n$, astfel încât

$n + (-n) = (-n) + n = 0$.

Înmulțirea numerelor întregi are toate proprietățile din mulțimea $\mathbb{N}$, plus:

Orice număr întreg înmulțit cu (-1) dă opusul său:

$a \cdot (-1) = -a; -a \cdot (-1) = a; (\forall)\, a \in \mathbb{Z}$.

$a \cdot 0 = 0, (\forall)\, a \in \mathbb{Z}^*$.

În mulțimea numerelor raționale

Adunarea are toate proprietățile adunării numerelor întregi.

Înmulțirea are în plus: orice număr rațional nenul $a \in \mathbb{Q}^*$ are un invers notat cu $a^{-1} = \frac{1}{a}$, astfel încât $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, (\forall)\, a \in \mathbb{Q}^*$.

4. Reguli de calcul cu puteri

Fie $a, b, m, n \in \mathbb{N}$.

Prin definiție: $a^0 = 1, a \in \mathbb{N}^*$, $1^m = 1; 0^n = 0$, 0^0 nu are sens.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (scriem baza și adunăm exponenții).
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (scriem baza și scădem exponenții).
3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ scriem baza și înmulțim exponenții).
4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ (se ridică fiecare factor la puterea m).
5. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ (se ridică produsul la puterea m).
6. $a^m : b^m = (a : b)^m$ (împărțim bazele și apoi ridicăm la puterea m, dacă $b \mid a$).

Completați tabelul următor aplicând reguli de calcul cu puteri:

a	15	12
b	3	6
m	6	4
n	4	2
$a^m \cdot a^n$		
$a^m : a^n$		
$(a^m)^n$		
$(a \cdot b)^m$		
$(a : b)^m$		
$(a \cdot b)^n$		
$(a : b)^n$		
$a^{m^{1^n}}$		
$b^{n^{m^0}}$		

Exemple:

1. Suma puterilor consecutive ale numărului $a \in \mathbb{N}^*, a \geq 2$.

$S(a) = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$. Calculați S(2), S(3).

2. $S(2^2) = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{2n}, n \in \mathbb{N}^*; S(2^2) = \dfrac{2^2(2^{2n} - 1)}{3}$.

3. Suma primelor n numere naturale impare este un număr natural pătrat perfect.

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = \left(\dfrac{2n - 1 + 1}{2}\right)^2 = n^2$.

5. Divizibilitatea numerelor în mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Z}$

Numărul natural (întreg) a este divizibil cu numărul natural (întreg) b, dacă există un număr natural (întreg) c, astfel încât $a = b \cdot c$.

Scriem $b \mid a$ și **citim** numărul b divide numărul a sau numărul b este un divizor al numărului a.

Scriem $a \vdots b$ și **citim** numărul a este divizibil cu numărul b sau numărul a este un multiplu al lui b.

Mulțimea divizorilor unui număr natural (întreg) a se notează D_a și este o mulțime finită.

Exemple: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
$D_{28} = \{-28, -14, -7, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.

Mulțimea multiplilor unui număr natural (întreg) $n > 2$ se notează M_n și este o mulțime infinită.

Exemple: $M_2 = \{0, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$;
$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, \ldots, 15k, \ldots\}, k \in \mathbb{N}$.

6. Proprietăți ale relației de divizibilitate

1. Numărul 1 este divizor al oricărui număr natural (întreg):
$1 \mid a, (\forall)\, a \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}$;

2. Numărul 0 este multiplul oricărui număr natural (întreg) nenul: $a \mid 0, (\forall)\, a \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{Z}^*$;

3. Orice număr natural (întreg) nenul se divide prin el însuși:
$a \mid a, (\forall)\, a \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{Z}^*$;

4. Dacă $m \mid a$ și $a \mid n$, atunci $m \mid n$, $(\forall)\ a, m, n \in \mathbb{N}^*$;

5. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ și $a \mid 1$, atunci $a = 1$.

Divizibilitatea sumei (diferenței)

1. Dacă fiecare termen al unei sume (diferențe) se divide prin același număr, atunci și suma (diferența) se divide prin același număr.

Dacă $m \mid a$ și $m \mid b$, atunci $m \mid (a \pm b)$, $a, b, m \in \mathbb{Z}^*$.

2. Dacă suma (diferența) a două numere și un termen al său se divide prin același număr, atunci și celălalt termen se divide prin același număr.

Dacă $m \mid (a \pm b)$ și $m \mid b$, atunci $m \mid a$, $a, b, m \in \mathbb{Z}^*$.

Exemplu: Arătați că numărul natural $X = 98a - 14b + 196$ este divizibil cu 14.

Rezolvare: a) $14 \mid 98a$; $14 \mid 14b$; $14 \mid 196 \Rightarrow 14 \mid X$.

b) Factorul comun este 14: $X = 14 \cdot (7a - b + 14) \Rightarrow 14 \mid X$.

Divizibilitatea produsului

1. Orice număr natural (întreg) divide un multiplu al său:

$a \mid m \cdot a$, $m, a \in \mathbb{Z}^*$.

2. Orice factor al unui produs divide produsul:

$P = a \cdot b \cdot c \Rightarrow a \mid P$, $b \mid P$ și $c \mid P$, $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.

3. Dacă un număr natural (întreg) se divide prin două numere naturale prime între ele, atunci el se divide și prin produsul lor.

Dacă $a \mid n$, $b \mid n$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \cdot b \mid n$, $a, b, n \in \mathbb{N}^*$.

Numerele prime sunt numere care au numai doi divizori (pe 1 și numărul însuși).

Exemplu: $D_{13} = \{1, 13\}$.

Numerele care au mai multe doi divizori se numesc **numere compuse**.

Exemplu: Se dau numerele: 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49 și 193. Stabiliți care dintre acestea sunt numere prime.

Rezolvare: Numerele 40, 42, 44, 48 sunt divizibile cu 2, deci a mai mult de doi divizori, așadar sunt numere compuse; $5 \mid 45$, deci 45 este număr compus; $49 \vdots 7$, deci 49 este număr compus. Numerele 41, 43, 47 nu sunt divizibile cu 2, 3, 5, 7, deci ele sunt numere prime.

$2 \nmid 193$, $3 \nmid 193$, $5 \nmid 193$, $7 \nmid 193$;

$193 = 11 \cdot 17 + 6$; $11 < 17 \Rightarrow 11 \nmid 193$;

$193 = 13 \cdot 14 + 11$; $13 < 14 \Rightarrow 13 \nmid 193$;

$193 = 17 \cdot 11 + 6$; $17 > 11 \Rightarrow 17 \nmid 193$. Stop. Câtul este mai mic decât împărțitorul. Numărul 193 este număr prim.

7. Tabel cu numerele prime mai mici decât 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Folosind tabelul de mai sus, rezolvați cerințele.

1. Aflați câte numere $\overline{abc}$ prime cu $\overline{bc}$ număr prim dacă:

a) $a = 1$; b) $a = 2$; c) $a = 9$.

2. Este adevărat că sunt 14 numere prime de forma $\overline{abc}$ cu $a = 3$ și $\overline{bc}$ număr prim?